LA: Matrizen I

Zeilenumformungen

- **Multiplikation** der i-ten Zeile mit λ:

$$\boxed{A \cdot \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & \cdots & \\ & & \vdots & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \uparrow \text{i-te Spalte} & \end{array}} \qquad \det = \lambda$$

- **Addition** des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten:

$$\boxed{A \cdot \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 \cdots & \lambda \cdots & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \uparrow \text{j-te Spalte} & \end{array}} \qquad \det = 1$$

- **Vertauschen** der i-ten mit der j-ten Zeile

$$\boxed{A \cdot \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{i-te Zeile} \\ \leftarrow \text{j-te Zeile} \end{array} \end{array}} \qquad \det = -1$$

bei quadratischen A:

$$\boxed{\det(D) = \det(S_t) \cdot \ldots \det(S_1) \cdot \det(A) = \prod(\underbrace{\lambda_r}_{\substack{\text{gewisse } r \\ \text{mit } \lambda \text{ multipliziert}}} \cdot \underbrace{(-1)^k}_{\text{k-mal Zeilen vertauscht}} \cdot \det(A))}$$

LA: Weitere Vektoren

Skalarprodukt: Abb $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$,

- $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- $\langle v, u + w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$, $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$
- $\langle v, v \rangle \geq 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Orthogonalbasis: Basis eines $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt s.d., dass $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ (alle senkrecht)

Orthonormalbasis: Orthogonalbasis mit normierten Vektoren

Gram-Schmidt:

V: $\mathbb{R}$-VR mit Basis $v_1, \dots, v_m$

- Orthogonalisierung: $u'_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle \cdot u_j$
- Normierung: $u_k = \frac{1}{\sqrt{\langle u'_k, u'_k \rangle}} \cdot u'_k$

$\varphi : V \to V$ lineare Abb.

Eigenvektor (EV): $v \in V$, $v \neq 0$, sodass $\varphi(v) = \lambda \cdot v$

$\uparrow$ Eigenwert (EW)

$A \in M_{n \times n}(K)$

$$\lambda \text{ ist EW von } A \Leftrightarrow \ker(A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\det(A - \lambda \cdot \mathbb{1}_n)}_{\text{charakteristisches Polynom}} = 0$$

(λ die Unbestimmte) (Grad n)

Nullstellen sind EWs